

Traitements géométriques des images par bandelettes

Stéphane Mallat et Gabriel Peyré
CMAP, Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

12 mai 2006

1 La géométrie de la perception

Comprendre comment représenter les structures géométriques complexes est nécessaire pour améliorer l'état de l'art du traitement d'images mais a aussi une portée scientifique beaucoup plus large. Cet enjeu apparaît dans des problèmes de physique, de mathématiques et de physiologie de la perception. Un regard naïf sur les images peut laisser penser que la géométrie se réduit aux contours d'objets distincts comme dans le monde de la bande-dessinée. De tels contours existent mais constituent une faible partie des « structures géométriques » des images. Dans une image réelle, les textures ont souvent une géométrie beaucoup plus complexe. Le saut en complexité est analogue à la différence de complexité entre un écoulement fluide laminaire et un champ turbulent, qui s'apparente à une texture.

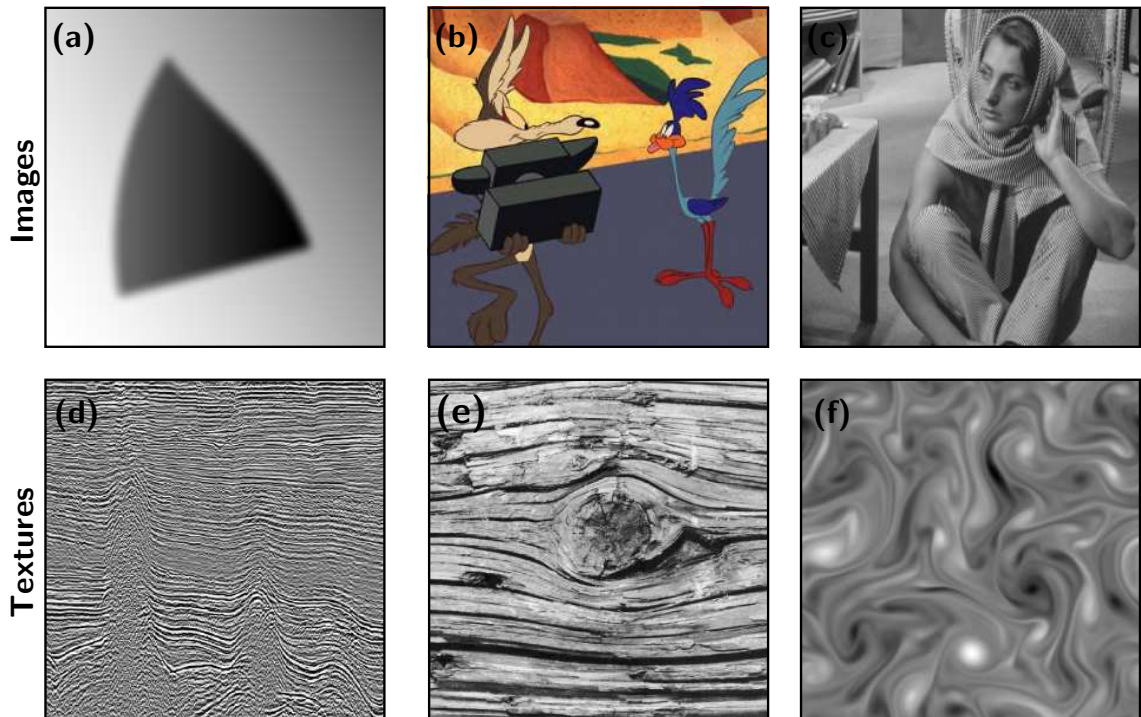


FIG. 1 – *Exemples d'images à géométrie variable. (a) : bande dessinée. (b) : image naturelle. (c) : image sismique. (d) : texture de bois. (e) : champ de vorticité d'un fluide turbulent. (f) : spectrogramme d'un chant d'oiseau.*

La géométrie est au cœur de la perception. Il suffit de regarder un dessin pour se

convaincre de la puissance d'évocation de quelques lignes sur un papier pour les contours ou d'un « hachurage » pour représenter une texture. Dans une séquence vidéo, le champs de mouvement des structures est une information géométrique tout aussi essentielle pour le traitement de l'information. Bien que cela soit moins évident, la perception des sons s'apparente aussi à une analyse géométrique, notamment au travers de la perception du « mouvement » des lignes harmoniques. Cette idée abstraite apparaît plus clairement sur le spectrogramme spectrogrammé d'un chant d'oiseau de la figure 1(f). On peut donc se demander si les géométries des structures spatiales d'une image (contours et textures), des mouvements spatio-temporels d'une vidéo ou des mouvements du plan temps-fréquence peuvent être représentées avec les mêmes outils mathématiques.

Bien qu'éloignée des mathématiques, la psychophysique de la « Gestalt » apporte une vision unificatrice de la géométrie de la perception, par des processus de groupements. Des études de neurophysiologie plus récentes montrent aussi l'existence de neurones qui répondent à certaines formes de géométries y compris pour les illusions de la Gestalt. Modéliser cette perception géométrique reste cependant un problème ouvert.

D'un point de vue mathématiques, les outils classiques de la géométrie différentielle peuvent décrire les propriétés des contours lorsqu'ils sont bien définis, mais s'avèrent plus difficile à utiliser pour l'analyse de champs tels que des textures, qui s'apparentent plutôt à des structures turbulentes. Cela explique pourquoi ce type d'outils ne peut être utilisé pour représenter la totalité de l'information des images. L'analyse harmonique donne avec la transformée en ondelettes une première réponse flexible pour représenter les composantes régulières et les textures des images. Ainsi les bases orthogonales d'ondelettes ont été adoptées pour le standard de compression d'images JPEG-2000. Cependant les bases d'ondelettes sont sous-optimales pour la représentation de structures géométriquement régulières comme expliqué dans la section 2.

Construire des représentations à l'interface de la géométrie et de l'analyse harmonique est devenu un enjeu important de la recherche en traitement d'images. Les applications couvrent aussi bien la vision par ordinateur que la compression d'images et la résolution de problèmes inverses. Comprimer ou restituer la géométrie des images est aussi au cœur de nombreux problèmes industriels en imagerie satellitaire, médicale, géophysique ou pour la vidéo numérique.

La section 2 commence par expliquer le comportement et les sources d'inefficacité des bases d'ondelettes pour des images géométriquement régulières. Traiter la géométrie des images n'est pas un nouveau problème, ainsi l'approche par éléments finis est rappelée à la section 3.1 et par curvelets à la section 3.2. Les représentations géométriques d'images par bandelettes sont ensuite détaillées. Les bases de bandelettes s'obtiennent à partir d'une cascade hiérarchique d'opérateurs orthogonaux élémentaires. La géométrie est une paramétrisation de ces opérateurs permettant adapter cette cascade aux propriétés locales du signal sous-jacent. Cette structure hiérarchique autorise des algorithmes de calculs rapides. On peut alors démontrer des théorèmes garantissant l'optimalité asymptotique de ce type de bases pour l'approximation, la compression et l'estimation de certaines classes de fonctions. La construction des différents types de bases de bandelettes est présentée dans la section 4. Au-delà des mathématiques, la flexibilité de la structure hiérarchique des bandelettes ouvre aussi des connexions avec certains modèles neurophysiologiques de la vision, que nous expliquerons.

D'un point de vue industriel, les techniques de géométrie multi-échelles sont utilisées pour la résolution de problèmes inverses en géophysique pour l'exploration pétrolière, pour des études d'imagerie satellitaire et d'imagerie médicale. Un algorithme de compression de photos d'identité permettant de restaurer des images de qualité suffisante avec moins de

500 octets a été mis au point en utilisant la géométrie des coefficients d'ondelettes. Pour la vidéo, utiliser la régularité spatio-temporelle des images permet de s'attaquer au problème difficile de la super-résolution. Il s'agit ici de calculer des images vidéo de haute résolution à partir de vidéos de plus basse résolution. Cela permet de transformer des images de télévision de résolution standard (NTSC/PAL) en des images de haute définition pour les nouveaux écrans plats de grandes tailles. Les pixels manquants des structures fines de l'image sont estimés en présence de bruits, grâce à l'existence de régularités géométriques spatio-temporelles.

2 Représentations dans des bases d'ondelettes

La décomposition d'une fonction dans une base orthonormale permet de définir des représentations creuses avec un simple seuillage. En particulier, les bases orthonormées d'ondelettes définissent des approximations optimales de certaines classes de fonctions régulières par morceaux. Un rappel rapide de ces propriétés montre aussi les limitations de ces bases pour l'approximation de structures géométriques.

Dans une base orthonormée $B = \{g_\mu\}_\mu$ la meilleure approximation d'une fonction f à partir de M coefficients s'obtient en sélectionnant les M plus grands coefficients au-dessus d'un seuil T :

$$f_M \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{|\langle f, g_\mu \rangle| > T} \langle f, g_\mu \rangle g_\mu \quad \text{avec} \quad M \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Card} \{\mu \mid |\langle f, g_\mu \rangle| > T\},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire. L'erreur d'approximation est alors :

$$\|f - f_M\|^2 = \sum_{|\langle f, g_\mu \rangle| \leq T} |\langle f, g_\mu \rangle|^2.$$

Un modèle de signaux définit un ensemble Θ tel que $f \in \Theta$. Optimiser la représentation revient alors à maximiser la vitesse de décroissance de l'erreur $\|f - f_M\|^2$ lorsque M augmente, pour tout $f \in \Theta$. Asymptotiquement, il s'agit de trouver des bases B telles que $\|f - f_M\|^2 = O(M^{-\beta})$ pour β aussi grand que possible.

Si une base B permet d'obtenir des approximations optimales sur Θ , on peut alors montrer qu'un algorithme de compression dans cette base est aussi optimal sur Θ , tout comme un algorithme de débruitage par seuillage des coefficients dans la base. Le problème d'approximation est donc au cœur des problèmes de compression et de restauration.

2.1 Bases d'ondelettes 1D

Une base d'ondelettes B de $L^2([0, 1])$ est obtenue en dilatant et translatant une fonction ψ [25, 26, 6, 19]

$$B \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\psi_{jn} \mid j \leq 0, n = 0 \dots 2^{-j} - 1\} \quad \text{avec} \quad \psi_{jn}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n),$$

avec une légère modification pour les fonctions ψ_{jn} dont le support intersecte le bord de $[0, 1]$. Les ondelettes sont des fonctions oscillantes qui ont des moments nuls. Une ondelette a p moments nuls si elle est orthogonale aux polynômes de degré $p - 1$:

$$\forall k \leq p - 1, \quad \int_0^1 \psi(x) x^k dx = 0.$$

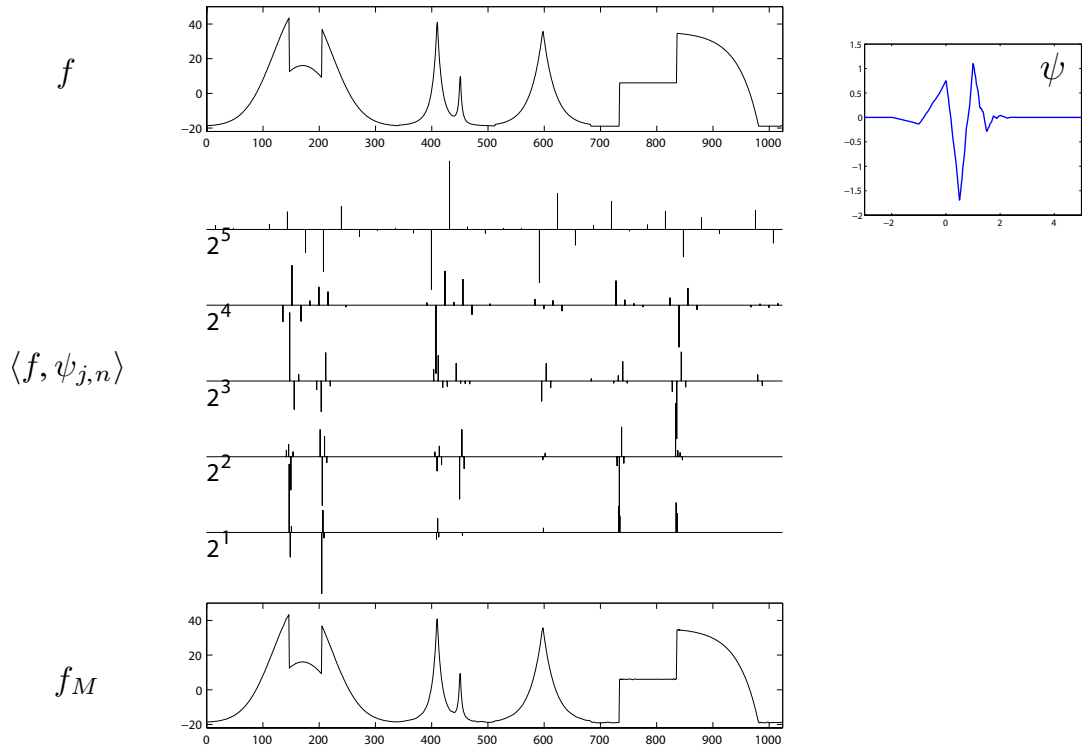


FIG. 2 – Fonction f , transformée en ondelettes, et approximation f_M obtenue en gardant 10% des coefficients.

Daubechies [5] a montré que l'on peut construire de telles ondelettes ayant un support compact et générant une base orthonormale. Ainsi le support de ψ_{jn} est proportionnel à 2^j et est localisé autour de $2^j n \in [0, 1]$.

La construction des espaces multiresolutions montre que la simplicité de la transformée en ondelettes et l'existence d'un algorithme rapide vient du fait que cette transformée est factorisable en un produit d'opérateurs orthogonaux élémentaires [17]. Numériquement, ces opérateurs se calculent par une convolution discrète avec des filtres « miroirs en quadratures », qui sont dilatés par l'insertion de zéros. La cascade de ces filtrages orthogonaux met en œuvre l'algorithme rapide de la transformée en ondelettes orthogonales, qui nécessite $O(N)$ opérations pour un signal de taille N [18].

La figure 2 montre une fonction régulière par morceaux, ainsi que ses coefficients en ondelettes $\langle f, \psi_{jn} \rangle$. On peut constater que les grands coefficients sont peu nombreux et localisés au voisinage des singularités. En effet, si f est C^α sur un intervalle contenant le support d'une fonction ψ_{jn} alors le coefficient d'ondelettes est petit aux petites échelles : $|\langle f, \psi_{jn} \rangle| = O(2^{j(\alpha+1/2)})$. Si f est C^α par morceaux et a un nombre fini de singularités, on peut montrer que l'approximation f_M obtenue avec M coefficients d'ondelettes vérifie

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}).$$

Cette décroissance asymptotique est optimale et est égale à celle obtenue si f n'avait pas de singularités. L'existence d'un nombre fini de singularités n'affecte donc pas la précision asymptotique d'une approximation dans une base d'ondelettes. La figure 2 montre f_M calculé avec 10% des coefficients d'ondelettes.

2.2 Bases d'ondelettes 2D

Les bases d'ondelettes de $L^2([0, 1]^2)$ sont obtenues par translations et dilatations de 3 ondelettes élémentaires $\{\psi^H, \psi^V, \psi^D\}$ qui oscillent dans les directions horizontale, verticale, et diagonale. Ces ondelettes bidimensionnelles s'obtiennent par un produit séparable d'ondelettes monodimensionnelles. La figure 3 montre un exemple d'ondelettes 2D.

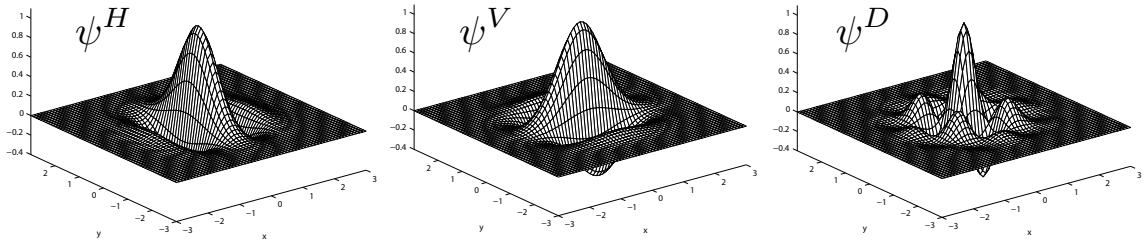


FIG. 3 – Exemple d'un triplet de fonctions ondelettes en 2D.

Une base orthonormée d'ondelettes de $L^2([0, 1]^2)$ s'écrit

$$B = \left\{ \psi_{jn}^k(x) = 2^{-j} \psi^k(2^{-j}x - n) = 2^{-j} \psi^k(2^{-j}x_1 - n_1, 2^{-j}x_2 - n_2) \right\}_{j < 0, 2^j n \in [0, 1]^2}^{k=H,V,D}.$$

La figure 4 montre les coefficients en ondelettes d'une image selon les 3 orientations. Ces coefficients ont été seuillés afin de ne garder que 15% et 2% des plus grands coefficients en (b) et (c). Le zoom effectué sur la reconstruction f_M montre qu'avec seulement 15% des coefficients on obtient une reconstruction précise de l'image, mais qui se dégrade lorsque ce pourcentage diminue. Le standard de compression d'images JPEG2000 décompose l'image dans une base d'ondelettes et effectue une quantification et un codage entropique des coefficients afin d'optimiser le code binaire.

La figure 5 montre une application des bases d'ondelettes au débruitage d'images. L'image 5 en haut-milieu est dégradée par l'addition d'un bruit blanc Gaussien W de variance σ . L'image 5 (c) est une estimation linéaire obtenue par convolution avec un filtre optimisé. Une estimation linéaire supprime une partie du bruit mais lisse les singularités ce qui restaure une image plus floue. L'image (d) montre les coefficients en ondelettes de l'image bruitée. Ces coefficients sont seuillés de façon à ce que les coefficients gardés dans l'image (e) correspondent à des structures du signal par opposition au bruit, avec un seuil $T = 3\sigma$. L'image restaurée (f) s'obtient par transformée en ondelettes inverse sur les coefficients seuillés. Comme on peut le voir, le bruit a disparu dans les zones homogènes et les singularités sont beaucoup mieux restaurées car les coefficients d'ondelettes ont été préservés par le seuillage.

La performance asymptotique des algorithmes d'estimation et de compression dans des bases d'ondelettes dépendent des capacités d'approximation de ces bases. Si f est une fonction C^α alors son approximation f_M à partir de M coefficients en ondelettes satisfait :

$$\|f - f_M\| = O(M^{-\alpha}). \quad (1)$$

Cependant, s'il existe des discontinuités ce résultat n'est plus valable. Si f est régulière par morceaux au sens où elle est C^α ($\alpha > 1$) en dehors de courbes de longueurs finies (contours) alors on a seulement :

$$\|f - f_M\| = O(M^{-1}). \quad (2)$$

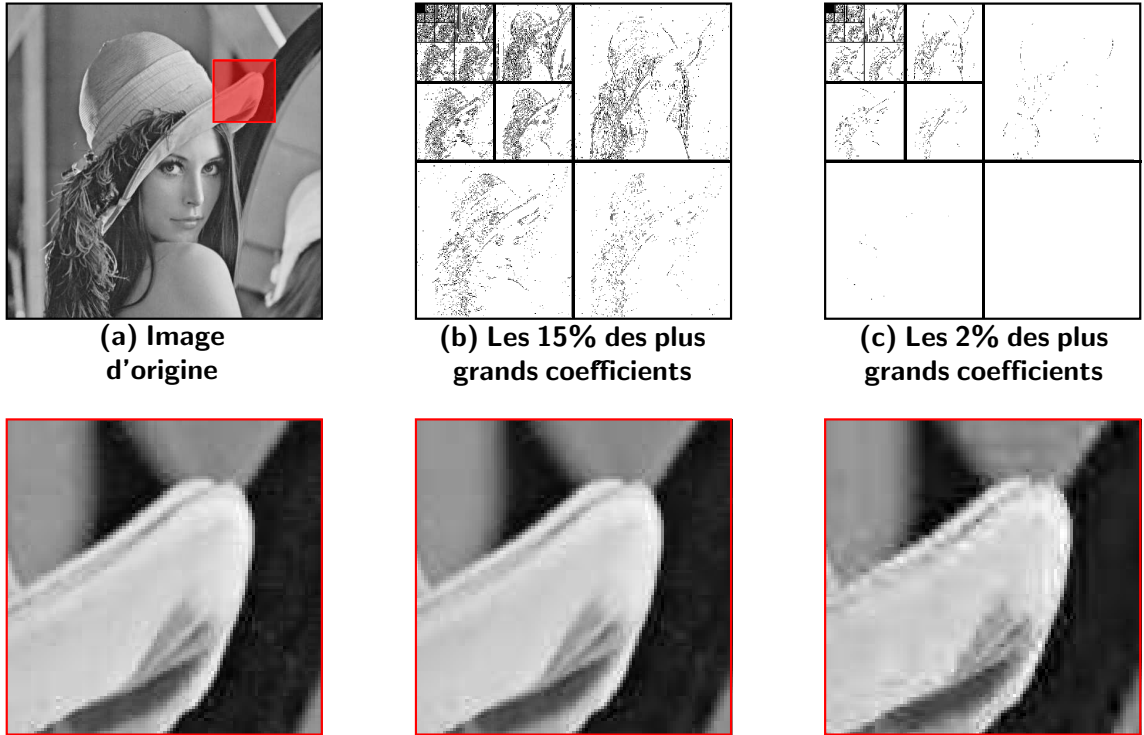


FIG. 4 – Approximation d'une image dans une base d'ondelettes avec un pourcentage variable de coefficients.

Contrairement au cas monodimensionnel, l'existence de singularités spécifie entièrement la décroissance asymptotique de l'erreur qui devient beaucoup plus lente. Le résultat (2) s'obtient comme cas particulier de la classe des fonctions à variations bornées [4]. La figure 6 montre les coefficients d'ondelettes d'une image régulière par morceaux. On voit que les grands coefficients en ondelettes sont le long des contours (coefficients blancs et noirs) et le nombre de ces coefficients est donc proportionnel à la longueur des contours. Ce sont ces coefficients qui déterminent la précision de l'approximation.

L'enjeu des représentations géométriques est d'utiliser la régularité géométrique des « singularités » de l'image afin d'améliorer le résultat d'approximation (2) obtenu avec des ondelettes. En particulier on voudrait obtenir des approximations qui satisfont $\|f - f_M\| = O(M^{-\alpha})$ comme s'il n'y avait pas de singularité dans l'image. C'est en effet le résultat obtenu en dimension 1.

3 Représentations géométriques des images

Un modèle simple d'image géométriquement régulière peut se définir comme une fonction f uniformément C^α à l'extérieur d'un ensemble de courbes régulières qui sont elle-même C^α par morceaux, avec $\alpha > 1$. Ces courbes sont typiquement des contours d'objets qui produisent des occlusions. Pour tenir en compte l'existence de phénomènes de diffraction, les singularités de f peuvent être lissées par un opérateur de convolution dont la réponse impulsionnelle est régulière. Les triangles de la figure 8 sont des exemples de fonctions géométriquement régulières.

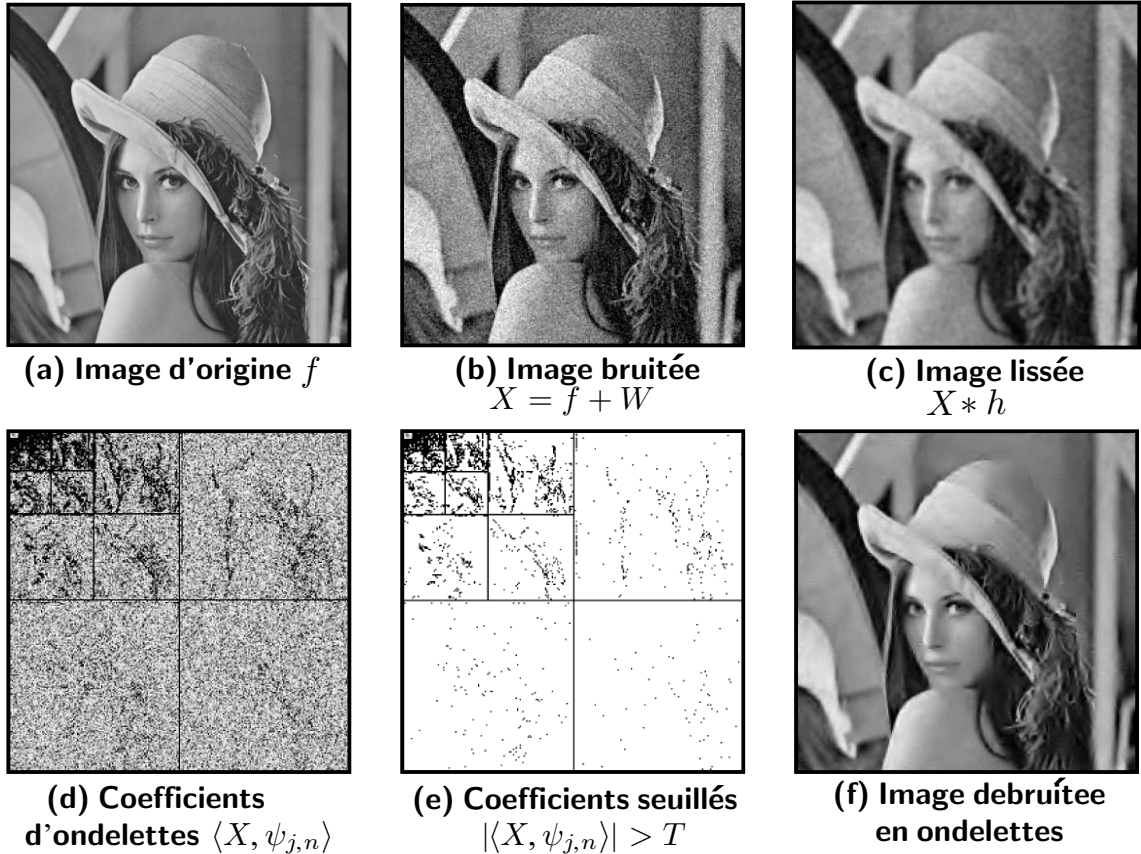


FIG. 5 – Débruitage par seuillage dans une base d'ondelettes.

3.1 Éléments finis

Un seuillage dans une base d'ondelettes est équivalent à une approximation par éléments finis de supports carrés, dont la taille est raffinée au voisinage des singularités, comme l'illustre la figure 8 (c). Pour améliorer la performance de ce type d'approximation, il est nécessaire d'adapter la géométrie des éléments finis, par exemple avec une triangulation adaptative anisotrope.

Étant donnée une triangulation du support de f en M de triangles, on définit \tilde{f}_M comme étant la meilleure approximation linéaire par morceaux de f sur cette triangulation. Le but d'une triangulation adaptative est d'optimiser la forme des triangles afin de minimiser l'erreur d'approximation $\|f - \tilde{f}_M\|$. Au voisinage d'une discontinuité, les triangles doivent être fins et allongés le long de la courbe de discontinuité, comme l'illustre la figure 9. Leur longueur doit être de l'ordre de M^{-1} alors que leur largeur doit être de l'ordre de M^{-2} . Si f est C^2 hors de contours eux mêmes C^2 alors on a

$$\|f - \tilde{f}_M\|^2 = O(M^{-2}). \quad (3)$$

Cependant, il n'existe actuellement aucun algorithme qui garantisse d'obtenir ce résultat pour des fonctions aussi complexes que des images [7]. En effet, la topologie de la triangulation doit s'adapter à l'anisotropie de la régularité locale de l'image. Lorsque l'image est lissée par un noyau de taille s inconnu, la triangulation doit dépendre de s afin d'obtenir le résultat (3), comme le montre la figure 10. Pour obtenir une erreur en $O(M^{-2})$, au voisinage des contours lissés par un noyau de taille s , les triangles doivent avoir une longueur

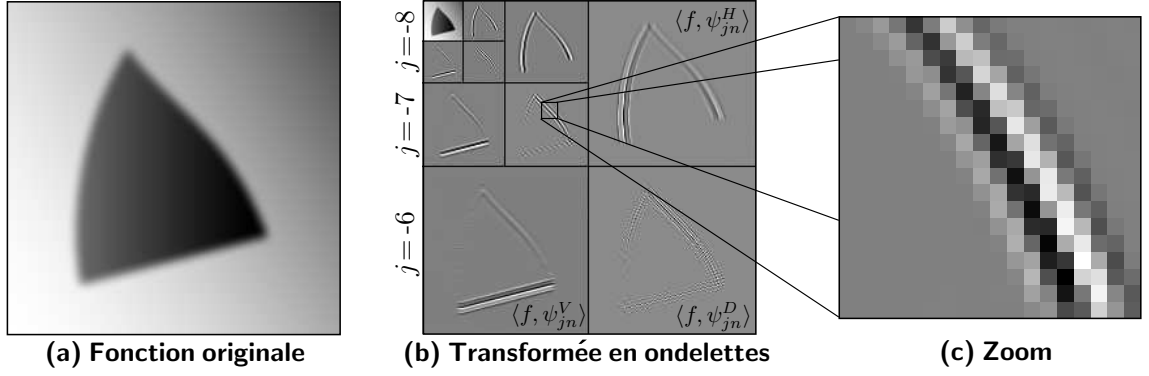


FIG. 6 – Une image géométriquement régulière et ses coefficients en ondelettes. Pour les coefficients d'ondelettes, le gris correspond à un coefficient proche de zéro, le noir à un coefficient fortement négatif et le blanc à un coefficient fortement positif.

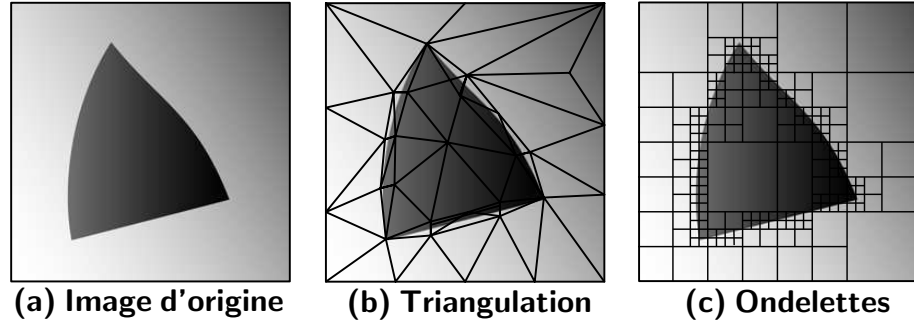


FIG. 7 – Approximation par triangulation et approximation par ondelettes (seuls les supports des fonctions de base utilisées sont représentés).

de l'ordre de $s^{1/4}M^{-1/2}$ et une largeur de l'ordre de $s^{3/4}M^{-1/2}$. L'échelle s étant le plus souvent inconnue il est nécessaire de trouver des algorithmes qui puissent automatiquement adapter la taille des triangles.

Cette analyse montre qu'il est possible d'atteindre des erreurs d'approximation qui décroissent plus vite que les ondelettes en adaptant l'approximation à la géométrie. Cependant l'approche par triangulation ne permet pas pour l'instant d'avoir des solutions algorithmiques satisfaisantes sur des images.

3.2 Curvelets

Les bases de curvelets de Candès et Donoho [3] apportent une solution mathématique et algorithmique très élégante pour s'adapter à la régularité d'images dont les contours sont C^2 . Contrairement aux ondelettes, les curvelets sont des fonctions dont le support est allongé comme les triangles anisotropes de la figure 8 (b). Une curvelet est une fonction $\psi_{\theta,j,u}(x)$ dont le support est centré en u avec une longueur proportionnelle à 2^j , une largeur proportionnelle à 2^{2j} et une orientation θ . La figure 11 montre plusieurs exemples de curvelets.

Candès et Donoho ont construit une base de Riesz de $L^2([0, 1]^2)$ avec des curvelets. Bien que ces bases ne soient pas orthogonales, si f est C^2 avec des contours C^2 , ils ont montré qu'un seuillage des coefficients de curvelets définit une approximation f_M qui satisfait

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2}(\log M)^3).$$

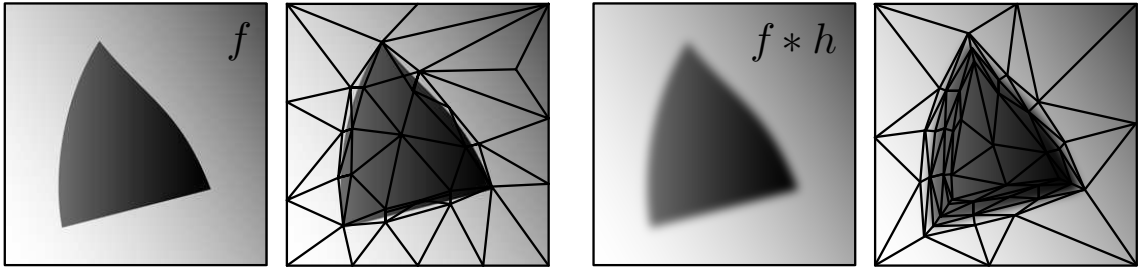


FIG. 8 – Approximations par triangulation d'une fonction sans et avec lissage.

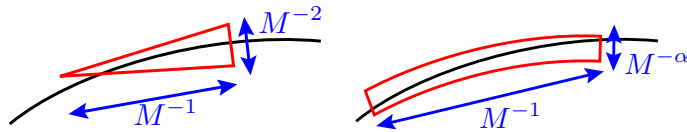


FIG. 9 – Éléments finis pour l'approximation autour d'une courbe.

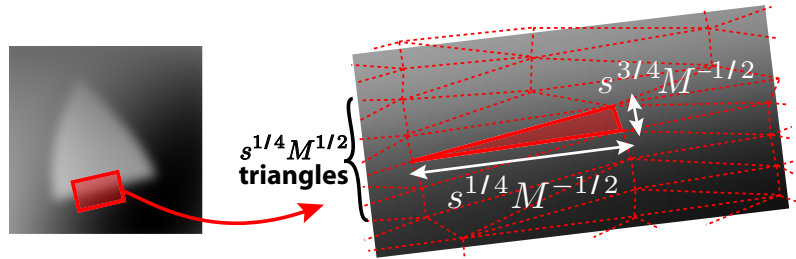


FIG. 10 – Aspect des triangles pour l'approximation d'un contour lissé.

Au terme $\log(M)$ près, on retrouve le résultat (3) attendu pour une approximation par triangulation optimale, avec cette fois-ci une approche algorithmique. La beauté de ce résultat vient de sa simplicité. Contrairement à une triangulation qui doit adapter la géométrie de ses éléments, la base de curvelets est fixée a priori et le seuillage des coefficients est suffisant pour adapter la géométrie de l'approximation. Cependant cette simplicité a un coût. Les approximations par curvelets sont optimales pour des fonctions C^α avec des contours C^α pour $\alpha = 2$, mais ce n'est plus le cas pour $\alpha > 2$ ou pour des fonctions plus irrégulières telles que des fonctions à variations bornées. Les curvelets sont donc moins efficaces que les ondelettes pour approximer des textures irrégulières. Par ailleurs il n'existe pas encore de bases orthogonales de curvelets. Pour l'instant, ces bases restent donc moins efficaces que les bases d'ondelettes pour compresser des images naturelles.

3.3 Représentations adaptatives

De nombreuses représentations géométriques adaptatives ont été étudiées ces dernières années pour les applications du traitement d'image, avec de beaux résultats. Au lieu de décomposer l'image sur une base fixée a priori, les algorithmes adaptatifs modifient la représentation en fonction de la géométrie calculée à partir de l'image. Les wedgelets de Donoho [8] segmentent le support de l'image en carrés dyadiques adaptés. Sur chaque carré l'image est approximée par une constante de chaque côté d'une frontière droite, dont la direction est optimisée au contenu local de l'image. Cette approche est généralisée par Shukla et al.[30] en remplaçant les constantes par des polynômes et la frontière droite par une courbe polynomiale. Ce type d'approche est particulièrement efficace tant que la

FIG. 11 – *Exemples de curvelets.*

géométrie de l'image reste relativement simple.

Pour améliorer les représentations en ondelettes, Wakin et al.[31] et Dragotti et Vetterli [10] ont proposé d'approximer les coefficients d'ondelettes avec des techniques adaptatives de quantification vectorielle. Suite au travail de Matei et Cohen [24] sur des schémas de lifting adaptatifs, de nouveaux algorithmes de lifting ont aussi été proposés pour prédire les coefficients d'ondelettes à partir de leurs voisins. Ces travaux sont pour l'instant plus algorithmiques que mathématiques. Ils montrent que les coefficients d'ondelettes orthogonaux ont une forme de régularité lorsque l'image est géométriquement régulière. On retrouve cette idée dans la construction des bases de bandelettes.

4 Approximations en bandelettes

Une représentation creuse s'obtient en exploitant une forme de régularité de la fonction. Ainsi les bases d'ondelettes exploitent la régularité isotrope sur des voisinages de tailles variables. L'existence de régularité géométrique peut être interprétée comme une régularité anisotrope. Bien que discontinue en un point le long d'un contour, l'image peut cependant être dérivable dans la direction de la tangente à cette courbe. La transformée en bandelettes exploite une telle régularité anisotrope en construisant des vecteurs orthogonaux qui s'allongent dans la direction de régularité maximale.

Les premières bases de bandelettes construites par Erwan Le Pennec [15, 14] ont permis d'obtenir des résultats d'approximation asymptotiquement optimaux pour des fonctions géométriquement régulières. Des travaux ultérieurs ont enrichi cette construction, grâce à l'utilisation d'une géométrie multiechelle sur des bases d'ondelettes [27, 23]. Ces bases de bandelettes multi-échelles sont présentées dans la section 4.1.

Des résultats récents en neurophysiologie montrent l'existence de neurones dédiés au traitement des structures géométriques de l'image, ayant certaines similarités avec une décomposition en bandelettes. Cependant la modélisation de ces processus neuronaux nécessite d'introduire d'avantage de flexibilité et de complexité dans la construction géométrique des bandelettes. Les applications industrielles du traitement de l'image requièrent aussi de pouvoir modéliser des géométries complexes. Ceci a donné lieu à de nouvelles bases orthogonales de bandelettes dont la géométrie est structurée à partir de groupements multi-échelles [21]. La section 4.3 décrit la construction et les applications de ces bases de bandelettes par groupements.

4.1 Bases de bandelettes orthonormales

Nous avons mentionné que la transformée en ondelettes est factorisable en un produit d'opérateurs orthogonaux élémentaires, obtenus par dilatation de filtres « miroirs en quadratures ». Les bases orthonormées de bandelettes s'obtiennent à partir des bases d'ondelettes, en introduisant une nouvelle cascade d'opérateurs orthogonaux, paramétrés par la géométrie locale de l'image.

La représentation en ondelettes est à la fois creuse et structurée. Pour une image géométriquement régulière, la figure 12 montre qu'à chaque échelle, les grands coefficients sont localisés au voisinage des courbes le long desquelles l'image est singulière. Si K est la taille du support des ondelettes ψ^k , les grands coefficients sont localisés dans des tubes de largeur K , comme l'illustre le zoom de la figure 12(c). Ces coefficients sont comprimés par un opérateur de « bandelettisation » orthogonal qui exploite la régularité géométrique sous-jacente.

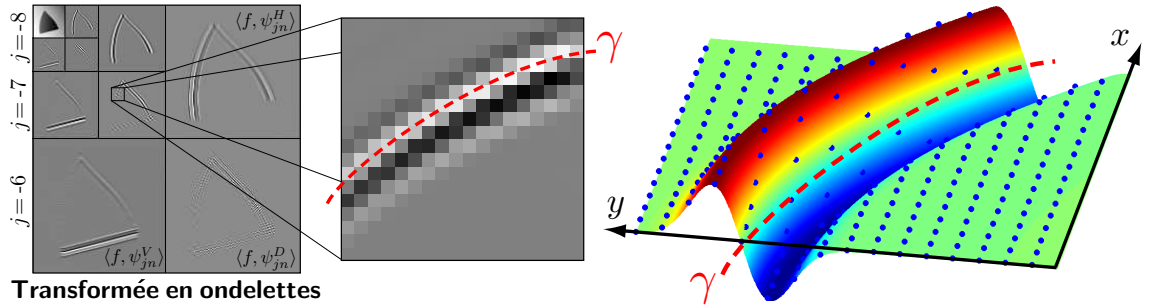


FIG. 12 – Les coefficients en ondelettes à une échelle 2^j sont un échantillonnage uniforme d'une fonction régularisée $f * \psi_j^k(x)$ illustrée sur la droite.

Les coefficients en ondelettes de f peuvent s'écrire comme un échantillonnage uniforme de f régularisée par une ondelette ψ_j^k dilatée par un facteur 2^j :

$$\langle f, \psi_{jn}^k \rangle = f * \psi_j^k(2^j n) \quad \text{où} \quad \psi_j^k(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{-x}{2^j}\right).$$

Supposons que l'on définisse un champ de vecteurs approximativement parallèle au contour comme l'illustre la figure 13. La fonction $f * \psi_j^k(x)$ hérite de la régularité de $\psi_j^k(x)$ et de la régularité géométrique de $f(x)$ parallèlement au flot, comme le montre la surface sur la droite de la figure 12. On rectifie le flot pour qu'il devienne horizontal grâce à une déformation régulière du plan. Cette déformation modifie la grille carrée de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes orthogonaux, comme le montre la figure 13. Dans le domaine déformé, le fait que le flot soit horizontal indique que la fonction $f * \psi_j^k$ a des variations régulières le long de droites horizontales. Cette régularité est capturée par une transformée d'Alpert orthogonale [1], construite avec des polynômes séparables horizontalement et verticalement, et définie sur l'échantillonnage obtenu après déformation de la fonction [23].

La transformée d'Alpert [1] peut s'interpréter comme une transformée en ondelettes polynomiales adaptée à des échantillonnages irréguliers. Elle s'obtient par orthogonalisation d'espaces multirésolutions de polynômes définis sur l'échantillonnage irrégulier. Les vecteurs résultants ne sont pas réguliers mais ont des moments nuls sur la grille d'échantillonnage. Un signal provenant d'un échantillonnage d'une fonction anisotrope régulière se représente ainsi par un petit nombre de ces vecteur de Alpert. Cette « bandelettisation » par transformée d'Alpert sur les coefficients d'ondelettes définit des fonctions appelées

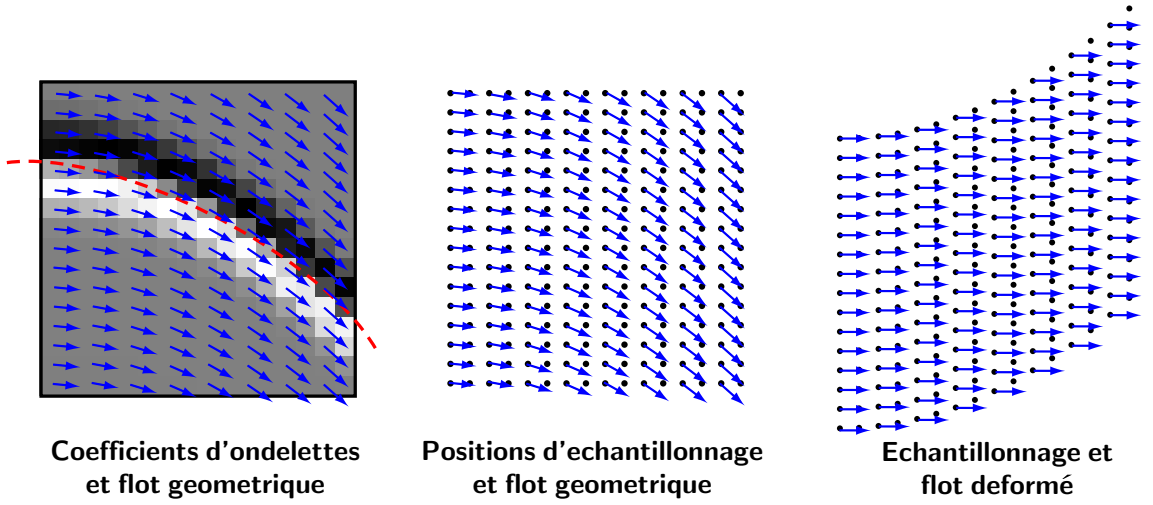


FIG. 13 – Déformation de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes afin d'obtenir un flot géométrique constant (ici horizontal).

bandelettes, qui peuvent s'écrire

$$b_{j,\ell,n}^k(x) = \sum_p a_{\ell,n}[p] \psi_{j,p}^k(x) .$$

Les $a_{\ell,n}[p]$ sont les coefficients de la transformée d'Alpert, qui dépendent du flot géométrique locale, pour chaque échelle 2^j et orientation $k = H, V, D$ de la transformée en ondelettes. Cette transformée d'Alpert introduit un facteur d'échelle $2^\ell > 2^j$ qui définit l'élongation de la bandelette parallèlement au flot et un paramètre de position n . Ainsi la fonction bandelette $b_{j,\ell,n}(x)$ hérite de la régularité de l'ondelette $\psi_{j,p}^k(x)$.

Flot géométrique segmenté. La famille de bandelettes orthogonales dépend du flot local à chaque échelle 2^j et orientation k . Ce flot parallèle est caractérisé par une courbe intégrale γ illustrée en pointillé à gauche de la figure 13. Cette courbe intégrale n'a pas besoin d'être strictement parallèle au contour grâce à la régularisation bidimensionnelle induite par l'ondelette $\psi_{j,p}^k(x)$ sur la fonction $f * \psi_{j,p}^k(x)$. Localement, on démontre qu'il est suffisant de prendre une approximation polynomiale du contour γ .

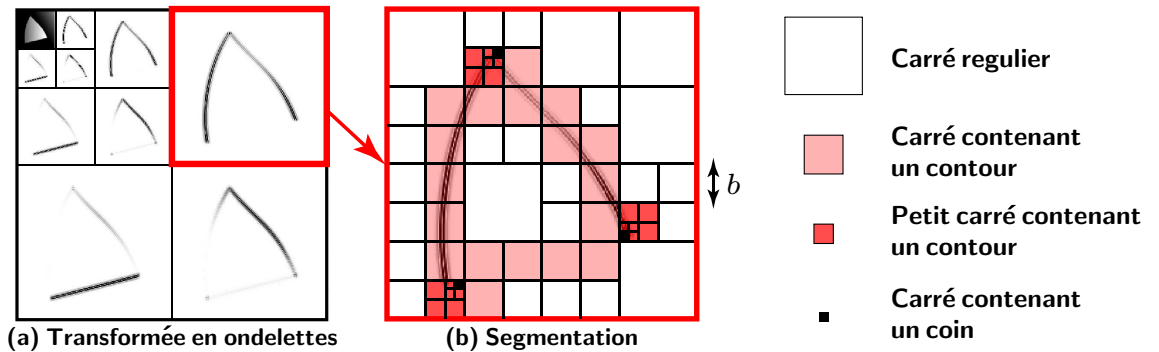


FIG. 14 – (a) : Coefficients en ondelettes de l'image. (b) : Exemple de segmentation d'une sous-bande de coefficients en ondelettes en carrés dyadiques de tailles variables, sur lesquels le flot de la transformée en bandelettes est calculé.

Il est nécessaire de segmenter l'ensemble des coefficients en ondelettes en zones séparées afin d'approximer la géométrie par un flot polynomial sur chaque zone. Pour chaque échelle 2^j et orientation k de la transformée en ondelettes, cette segmentation est obtenue par une division récursive en carrés dyadiques, qui peuvent avoir des tailles variables, comme l'illustre la figure 14. Une telle segmentation est définie par un arbre quaternaire qui spécifie la division successive des carrés en quatre sous-carrés deux fois plus petits. Une géométrie différente peut être choisie à chaque échelle pour s'adapter à l'évolution des structures géométriques de l'image aux différentes échelles.

Si la régularité de l'image n'a pas de direction préférentielle, comme cela peut être le cas dans des zones uniformément régulières ou au voisinage de jonctions, il n'y a pas de régularité géométrique directionnelle à exploiter. Il n'est donc pas nécessaire de modifier la base d'ondelettes. Dans ces cas, aucun flot n'est défini (cela correspond aux carrés dans zones de « régularité isotrope » et aux carrés de « jonctions » de la figure 14. Ce n'est que dans les carrés le long des « contours » que le flot doit être calculé, pour obtenir une base de bandelettes qui exploite la régularité anisotrope de l'image.

Meilleure approximation en bandelettes. La base de bandelettes dépend de la géométrie du flot définie par une segmentation des coefficients d'ondelettes et un choix de flot polynomial dans chaque segment (ou pas de flot). Le but étant d'optimiser l'approximation de chaque image f , la meilleure géométrie du flot est celle qui produit la meilleure approximation f_M de f avec M paramètres.

Soit M_g le nombre de paramètres qui spécifient la géométrie du flot, à savoir les paramètres des arbres quaternaires de chaque segmentation dyadique et les paramètres des flots polynômiaux dans chaque carré. Cette géométrie définit une base de bandelettes $\{b_{j,\ell,n}^k\}_{k,j,\ell,n}$ de $L^2([0,1]^2)$. Soit M_b le nombre de coefficients de bandelettes vérifiant $|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| > T$ pour un seuil T . L'approximation

$$f_M = \sum_{|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| > T} \langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle b_{\ell,j,n}^k$$

est déterminée par $M = M_b + M_g$ paramètres. Pour un seuil T fixé, parmi toutes les géométries et donc toutes les bases de bandelettes possibles, il faut trouver une base qui induise une erreur $\|f - f_M\|^2$ petite pour un petit nombre $M = M_b + M_g$ de paramètres. Ceci est un problème de recherche de « meilleure base orthogonale », qui se résout en minimisant le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \|f - f_M\|^2 + M T^2 = \sum_{|\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle| \leq T} |\langle f, b_{\ell,j,n}^k \rangle|^2 + M T^2. \quad (4)$$

Un théorème d'approximation [27, 23] montre que si f est uniformément C^α en dehors d'un ensemble de courbes qui sont C^α alors la meilleure base de bandelettes qui minimise le lagrangien (4) définit une approximation f_M qui satisfait

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-\alpha}). \quad (5)$$

Ce résultat reste valable si f est régularisée par un noyau de lissage correspondant aux effets de diffraction lors de l'acquisition de l'image. Il est à noter que l'approximation par bandelettes ne nécessite pas de connaître la valeur de α tant que $\alpha < p$, où p est le nombre de moments nuls de la base d'ondelettes orthogonales et de la transformée d'Alpert. Cette adaptivité est la clef de l'efficacité des bandelettes pour des images naturelles.

Un algorithme de recherche de meilleur base permet de calculer la meilleure base bandelettes associée à une image f en $O(N T^{(p-1)^2})$ opérations où N est le nombre total de pixels de l'image [14, 23]. Cet algorithme repose sur la structure emboîtée des segmentations dyadiques utilisées et sur l'algorithme rapide de la transformée d'Alpert.

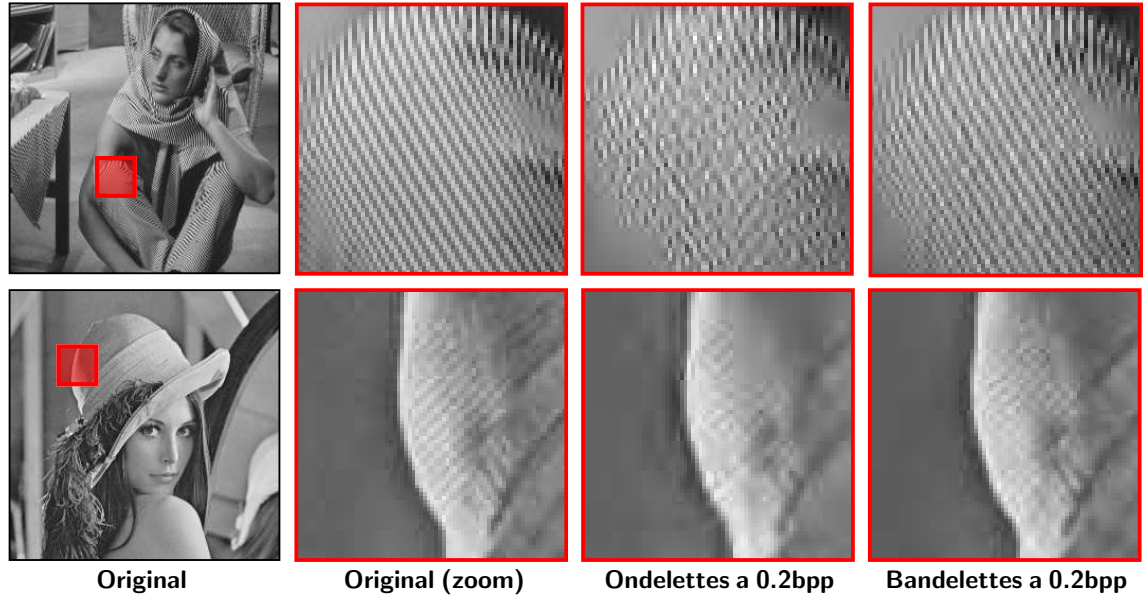


FIG. 15 – Comparaison de la compression en ondelettes et en bandelettes pour un taux de 0.2 bits/pixel.

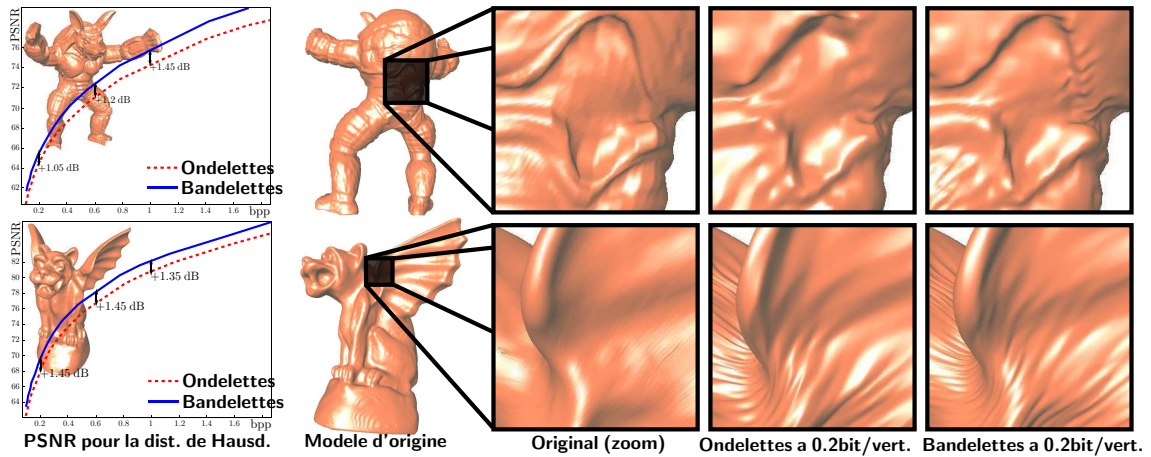


FIG. 16 – Comparaison de la distorsion L^2 lors de la compression de surfaces avec des ondelettes et des bandelettes, en fonction du nombre de bits R , sur deux exemples.

Compression et estimation. La compression d'image est une application immédiate des bases de bandelettes. Tout comme pour la transformée en ondelettes, ceci nécessite de quantifier les coefficients de bandelettes et d'optimiser le codage binaire de ces coefficients ainsi que les paramètres de la géométrie. Soit R le nombre total de bits d'un tel codage. On note par $D_b(R) = \|f - f_R\|^2$ l'erreur obtenue entre l'image f originale et l'image f_R restituée à partir des coefficients de bandelettes quantifiés. A partir du théorème d'approximation

(5) on démontre que si f est C^α en dehors de courbes C^α alors dans une base de bandelettes la distorsion de codage satisfait [14]

$$D_b(R) = \|f - f_R\|^2 = O(R^{-\alpha} |\log(R)|^\alpha) .$$

Dans une base d'ondelettes, l'approximation (2) induit une erreur de codage qui décroît asymptotiquement beaucoup plus lentement : $D_o(R) = O(R^{-1} |\log(R)|)$ [22].

La figure 15 compare l'image f_R restituée avec $R = 0.2$ bit par pixel (en moyenne), avec un codage dans une base d'ondelettes et de bandelettes [28]. La distorsion obtenue avec des bandelettes est inférieure à celle obtenue avec des ondelettes, ce qui se manifeste par une meilleure restitution des structures géométriques de l'image. Pour la compression de surfaces tridimensionnelles utilisées en synthèse d'images, les surfaces sont projetées sur des images à l'aide d'une cartographie locale, avant d'effectuer la compression en bandelettes [29]. Les bases de bandelettes s'adaptent aux singularités des surfaces comprimées. La figure 16 compare la reconstruction de surfaces comprimées en ondelettes et en bandelettes, et l'augmentation du PSNR obtenu en fonction du nombre de bits R .

L'amélioration des performances d'approximation se retrouve dans les applications de restauration d'images. La tomographie est un exemple d'application importante pour l'imagerie médicale. L'ensemble des mesures peut s'écrire

$$Y = Rf + W$$

où R est une transformée de Radon et W est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 . Une inversion directe de l'opérateur de Radon amplifie considérablement le bruit. Si f est C^α en dehors de courbes C^α par morceaux, un algorithme de seuillage dans une meilleure base de bandelettes [9] définit un estimateur \tilde{f} dont l'erreur quadratique moyenne a une décroissance asymptotiquement optimale en fonction de σ (au terme $\log \sigma$ près) :

$$E(\|f - \tilde{f}\|^2) = O(|\log(\sigma)|^{\frac{1}{2\alpha+1}} \sigma^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}).$$

Ceci correspond à une problématique d'optimisation de choix de modèle (meilleure géométrie). L'expression du lagrangien (4) qui définit la meilleure base doit être légèrement modifiée afin d'obtenir une estimation dont le terme de pénalisation génère un estimateur asymptotiquement optimal [9].

4.2 La géométrie dans le cerveau visuel

Comprendre la perception de la géométrie est un enjeu majeur de la psychophysique et de la neuro-physiologie de la vision. Les similarités et différences entre les modèles neurophysiologiques et les représentations géométriques du traitement de l'image sont une source importante d'idées pour faire évoluer ces outils à la fois en mathématiques, en traitement d'images et en neurophysiologie.

La géométrie de la perception est au cœur des travaux de la Gestalt sur la vision qui ont débuté dès les années 1920 [32]. La Gestalt définit la géométrie de la perception au travers de processus de groupements, qui se font selon un certain nombre de règles. La figure 17 montre des exemples de groupements perceptuels. On voit en (a) des traits ou des croix que l'on groupe visuellement pour percevoir des courbes, en (b) des courbes symétriques qui sont groupées pour définir une forme, en (c) des points qui sont groupés en une région. En (d) on voit une illusion de Kanitza, où des morceaux de contours sont associés pour définir les contours d'un triangle illusoire blanc. La géométrie est ici beaucoup plus diverse que dans le simple modèle mathématique de fonctions ayant des singularités le long de courbes régulières.

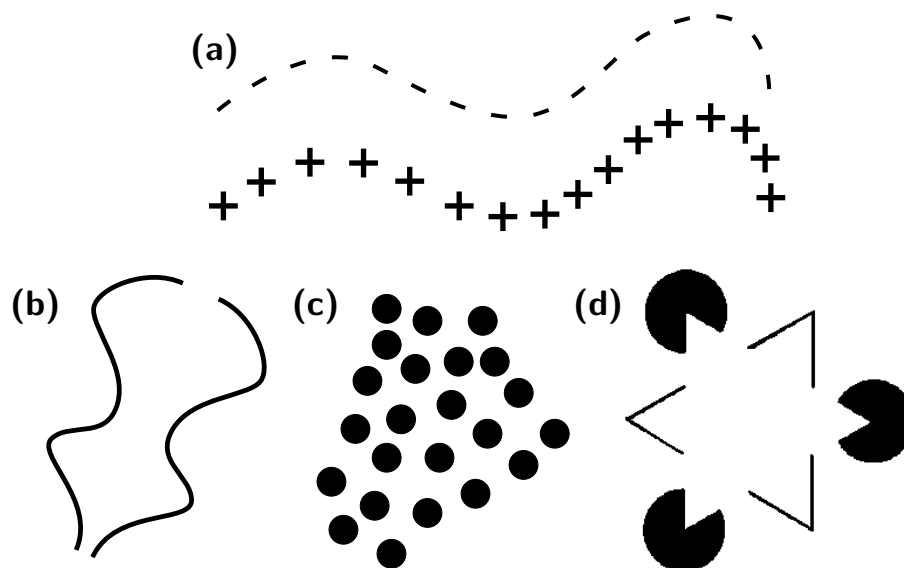


FIG. 17 – Exemples de groupements visuels décrits par la Gestalt.

Durant ces dernières années, des expériences physiologiques ont permis de mettre en évidence des neurones qui jouent un rôle important dans la perception de géométries aussi complexes que les illusions de Kanitza. Hubel et Wiesel [13] ont montré dans les années 60, qu'il existe une région du cortex visuel appelée V1, dans laquelle des « neurones simples » ont une réponse quasi-linéaire relativement au stimuli visuel reçu sur la rétine. Des centaines d'articles de neurophysiologie ont depuis étudié l'organisation de ces neurones dans V1. Il a été montré que ces neurones opèrent comme des filtres dont la réponse impulsionnelle ressemble à une ondelette (fonction oscillante dilatée). La figure 19 montre à droite la réponse impulsionnelle de tels neurones, mesurée dans V1 [33]. Ces neurones sont organisés dans une structure d'hypercolonnes illustrée par la figure 18. Plus l'on se rapproche du centre plus les réponses impulsionnelles sont dilatées, autrement dit la distance au centre correspond à un facteur d'échelle sur ces « ondelettes ». Par ailleurs, l'orientation de ces ondelettes change suivant la position du neurone par rapport au centre de l'hypercolonne, comme l'illustre la figure 18. Cette structure d'hypercolonne ressemble donc à une transformée en ondelettes, non-orthogonale et redondante, comme cela a déjà été observé par de nombreux chercheurs.

Plus récemment, des chercheurs ont montré que dans la zone V2 du cortex visuel, des neurones sont sensibles à des structures géométriques allongées, y compris aux illusions des triangles de Kanitza [16]. Ces neurones sont directement reliés aux neurones de V1 et semblent agréger l'information venue de V1. Ceci est illustré par le graphe de la figure 19 tirée de [16]. Plusieurs modèles de neurophysiologie [12] définissent ces agrégations par des « champs d'association » opérant au travers de connexions horizontales dans les hypercolonnes, comme l'illustre la figure 20. Des expérimentations montrent que l'activation de ces connexions horizontales dépend de l'image observée comme on peut s'y attendre pour un champ d'association géométrique.

Le modèle hiérarchique de V2 relativement à V1 ressemble à la hiérarchie des coefficients de bandelettes construits par combinaison des coefficients d'ondelettes, avec une géométrie qui dépend de l'image. Cependant la géométrie des bandelettes précédemment définies au travers d'une segmentation et de flots localement parallèles est trop rigide pour envisager de l'utiliser comme modèle possible pour la neurophysiologie. Ceci montre la nécessité de

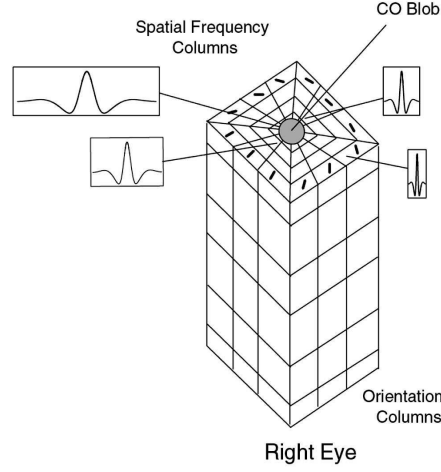


FIG. 18 – *Structure en hypercolonnes des neurones de V1 (figure extraite de [2]).*

rendre plus flexible la géométrie des bases orthonormées de bandelettes, en utilisant le concept de groupements et de champs d'association, qui apparaissent dans ces modèles de psychophysique et de neuro-physiologie.

4.3 Bandelettes par groupements

La géométrie de flots localement parallèles des bandelettes manque de flexibilité pour modéliser de nombreuses structures géométriques dans les images. Les jonctions ne sont pas explicitement modélisées et n'apparaissent qu'au détour de la segmentation, et on ne peut associer entre elles des structures similaires comme les croix de la figure 17(a). Par ailleurs, la segmentation en petites zones ne permet pas d'incorporer la régularité géométrique de longue portée de structures fines comme dans les textures de cheveux ou de bois de la figure 21.

Les bandelettes par groupements sont construites à l'aide d'une géométrie qui s'inspire de la Gestalt, en définissant des groupements multiéchelles [21, 20]. Ces groupements permettent notamment de prendre en compte les jonctions et les régularités géométriques de longues portées. Tout comme dans la section 4.1, les coefficients de bandelettes sont obtenus à partir des coefficients en ondelettes, grâce à un opérateur orthogonal de « bandelettisation » qui est lui-même obtenu par une cascade d'opérateurs orthogonaux élémentaires. En effet, à chaque groupement est associé un opérateur orthogonal de changement de base, correspondant à une transformée de Haar.

Transformée de Haar. A l'échelle $2^j = 1$, la transformée de Haar d'un signal $s[n]$ groupe chaque coefficient impair $s[2n+1]$ avec le coefficient pair voisin $s[2n]$ et associe une moyenne et une différence :

$$M = \frac{s[2n] + s[2n+1]}{2}, \quad D = \frac{s[2n] - s[2n+1]}{\sqrt{2}}.$$

Une transformée « en place », mémorise les moyennes sur les coefficients pairs $s[2n] = M$ et les différences sur les coefficients impairs $s[2n+1] = D$. Cette transformée orthogonale est répétée de façon hiérarchique sur les coefficients de moyenne, en doublant l'échelle. A une échelle 2^j , les moyennes précédemment calculées et stockées en $s[2^j 2n]$ et $s[2^j(2n+1)]$

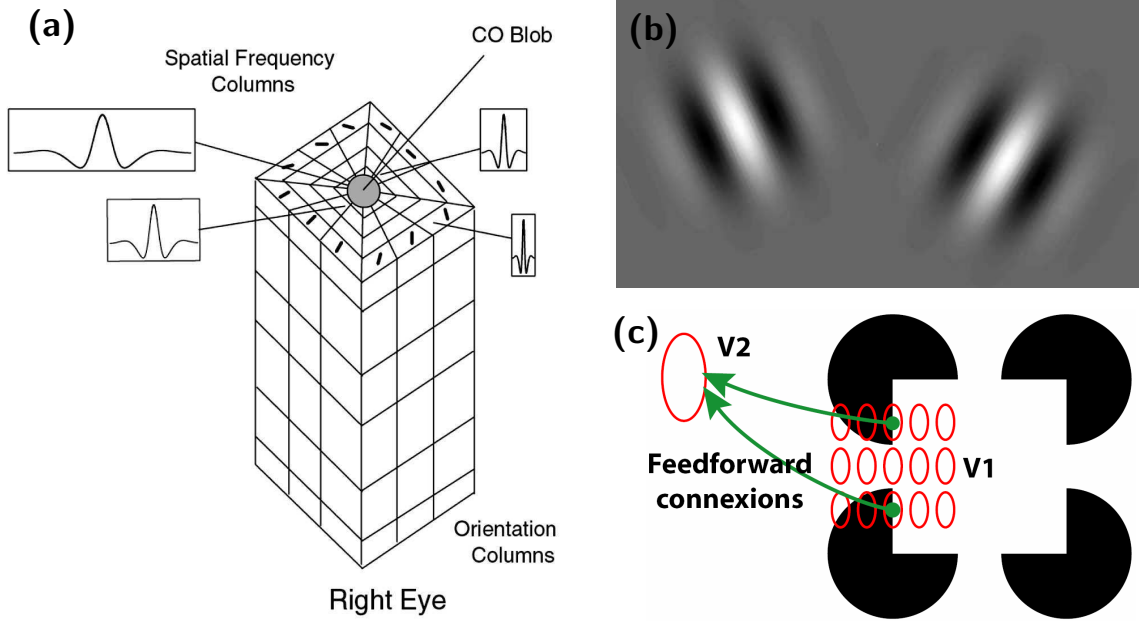


FIG. 19 – Cellules orientées de V1 (gauche, figure tirée de [33]), interaction entre les cellules de V1 et de V2 (droite, figure tirée de [16]).

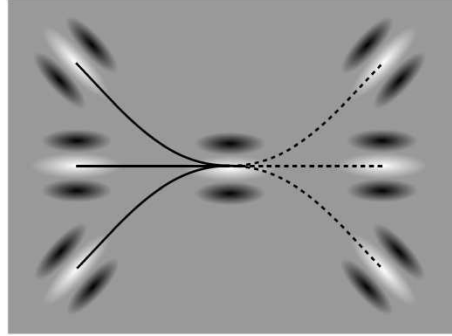


FIG. 20 – Champ d'association entre des neurones de V1 (image extraite de [12]).

sont groupées pour calculer de nouvelles moyennes et différences :

$$M = \frac{s[2^j 2n] + s[2^j (2n + 1)]}{2}, \quad D = (s[2^j 2n] - s[2^j (2n + 1)]) \sqrt{2^{(j-1)}},$$

et on mémorise ces valeurs en place : $s[2^j 2n] = M$ et $s[2^j (2n + 1)] = D$. À cette étape, M est égal à la moyenne des valeurs du signal d'origine sur l'intervalle $[2^{j+1}n, 2^{j+1}n + 2^{j+1}[$ alors que D est proportionnel à la différence entre la moyenne sur $[2^{j+1}n, 2^{j+1}n + 2^j[$ et la moyenne sur $[2^{j+1}n + 2^j, 2^{j+1}n + 2^{j+1}[$.

Bandelettisation par groupements multi-échelles. Une bandelettisation par groupements applique cette même transformée mais sur des paires de points qui sont voisins au sens où les valeurs du signal sur leurs voisinages sont similaires.

Pour un signal multidimensionnel (image ou vidéo) $s[n]$, la grille d'échantillonnage \mathcal{G}_0 est divisée en deux sous-grilles prédéfinies, que l'on appellera « sous-grille paire » $\mathcal{G}_{1,p}$ et « sous-grille impaire » $\mathcal{G}_{1,i}$ par analogie au cas monodimensionnel. Un poids $w[n]$ initialement normalisée à 1 est définie sur \mathcal{G}_0 . Ce poids représente le nombre de coefficients agrégé

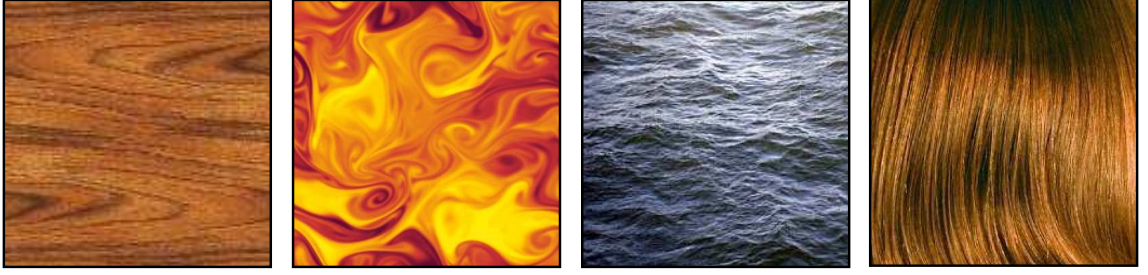


FIG. 21 – Exemples de textures avec des géométries complexes à longue portée.

en chaque point au cours de la transformation. Chaque point $m_i \in \mathcal{G}_{1,i}$ de la grille impaire est associée à un point $m_p \in \mathcal{G}_{1,p}$ de la grille paire, qui est optimisé pour que les valeurs de $s[n]$ pour n au voisinage de m_p soient les plus proches des valeurs de $s[p]$ pour p au voisinage de m_i . Le décalage $A_1[m_i] = m_p - m_i$ est un champ d'association. Le point m_p peut se calculer en minimisant une distance Euclidienne sur un voisinage de rayon P :

$$m_p = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{G}_{1,p}} \sum_{|n| < P} |s[m - n] - s[m_i - n]|^2.$$

Ce type d'association (« block matching ») est utilisé en traitement d'images pour calculer le mouvement des structures d'une image à l'autre dans des séquences vidéo. D'autres procédures peuvent être utilisées pour optimiser l'association.

Une moyenne et une différence pondérée sont calculées entre les valeurs du signal qui sont associées :

$$M = \frac{w[m_p] s[m_p] + w[m_i] s[m_i]}{w[m_p] + w[m_i]} \quad (6)$$

$$D = (s[m_p] - s[m_i]) \frac{\sqrt{w[m_p] w[m_i]}}{\sqrt{w[m_p] + w[m_i]}} \quad (7)$$

La transformée « en place » mémorise les différences sur la grille impaire et les moyennes sur la grille paire, avec un poids qui est la somme des poids sur les deux points associés :

$$s[m_i] = D, \quad s[m_p] = M \quad \text{avec} \quad w[m_p] = w[m_p] + w[m_i]. \quad (8)$$

On peut vérifier que ceci correspond à une transformée orthogonale, avec des coefficients de différence qui sont des produits scalaires avec des vecteurs normalisés ayant 1 moment nul. Ce processus est répété itérativement comme la transformée de Haar, en doublant l'échelle à chaque étape.

À une échelle 2^j , on suppose qu'un signal de moyenne a été calculé sur une grille paire $\mathcal{G}_{j,p}$. Cette grille est divisée en une « sous-grille paire » $\mathcal{G}_{j+1,p}$ et une « sous-grille impaire » $\mathcal{G}_{j+1,i}$. Chaque point $m_i \in \mathcal{G}_{j+1,i}$ de la grille impaire est associé à un point $m_p \in \mathcal{G}_{j+1,p}$ de la grille paire, qui est optimisé pour que les valeurs de $s[n]$ au voisinage de $n = m_p$ soient proches des valeurs au voisinage de $n = m_i$. On calcule alors les nouvelles moyennes et différences avec (7) et (6), qui sont respectivement mémorisées sur les sous-grilles paire $\mathcal{G}_{j+1,p}$ et impaire $\mathcal{G}_{j+1,i}$ avec la mise à jour des poids comme en (8).

La topologie des « sous-grilles paires » et « sous-grilles impaires » peut être choisie librement. La figure 22 illustre un groupement multi-échelle sur une image où la « sous-grille paire » $\mathcal{G}_{1,p}$ est l'ensemble des colonnes paires (points noirs) et la « sous-grille impaire » $\mathcal{G}_{1,i}$ est l'ensemble des colonnes impaires (ronds blancs). À l'échelle suivante, la figure 22 montre un nouveau champs d'association calculé sur $\mathcal{G}_{1,p}$ depuis les points de $\mathcal{G}_{2,i}$ vers les

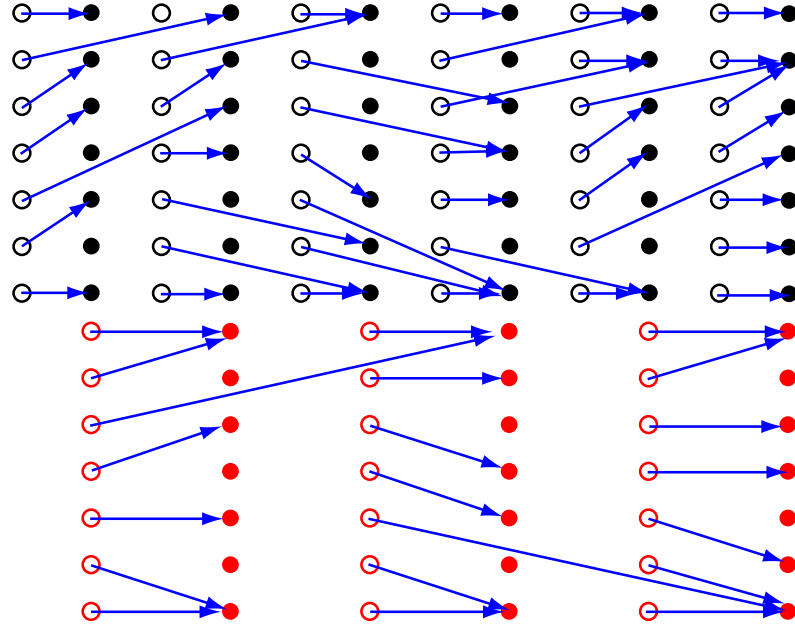


FIG. 22 – Exemple de champs d'associations à deux échelles successives, avec des sous-grilles paires et impaires correspondant aux colonnes paires et impaires de l'image.

points de $\mathcal{G}_{2,p}$. Les distances entre ces grilles ont doublé. Ce type de topologie de sous-grille n'est bien adapté qu'aux cas où les structures géométriques sont plutôt allongées selon une direction préférentielle (ici horizontale). C'est le cas en sismique ou pour les coefficients en ondelettes obtenus avec des ondelettes orientées. Dans d'autres cas, on peut choisir des sous-grilles agencées de façon plus isotrope.

La figure 23 montre un champ d'association calculé sur 3 échelles successives, pour une image de sismique de réflexion avec des sous-grilles correspondant à des colonnes paires et impaires comme dans la figure 22. Les trois images du bas montrent des champs d'association calculés aux échelles 2^0 , 2^1 et 2^2 . L'image en haut à droite donne les coefficients calculés par ces groupements. Il y a beaucoup plus de coefficients gris (proches de zéro) que dans l'image d'origine ce qui indique que l'on a bien utilisé la régularité géométrique pour obtenir une représentation plus creuse. Le débruitage de la figure 24 s'obtient par seuillage des coefficients obtenus avec une telle bandelettisation. Le calcul de la géométrie (champs d'association) se fait sur l'image bruitée. Tout comme pour le débruitage des coefficients d'ondelettes de la figure 5, les coefficients orthogonaux ainsi calculés sont seuillés et l'image débruitée est obtenue en appliquant la transformée inverse sur les coefficients seuillés. Ce débruitage par seuillage revient à calculer automatiquement un moyennage adaptatif du signal, en suivant les directions de régularité géométrique estimées par le champs d'association. Les bases de bandelettes par groupements ont aussi permis de développer des algorithmes de déconvolution des images sismiques, qui préservent mieux la géométrie des couches du sous-sol. Ces résultats sont utilisés pour l'interprétation des données sismiques.

Transformée en bandelettes par groupements. Une transformée en bandelettes s'obtient en appliquant la bandelettisation par groupements sur les coefficients en ondelettes orthogonaux, à chaque échelle et chaque orientation. Ceci est illustré par la figure 25. Cette bandelettisation se fait avec un champ d'association qui est lui même multi-échelles. La figure 25 montre un champs d'association calculé à une seule échelle, pour chaque image de

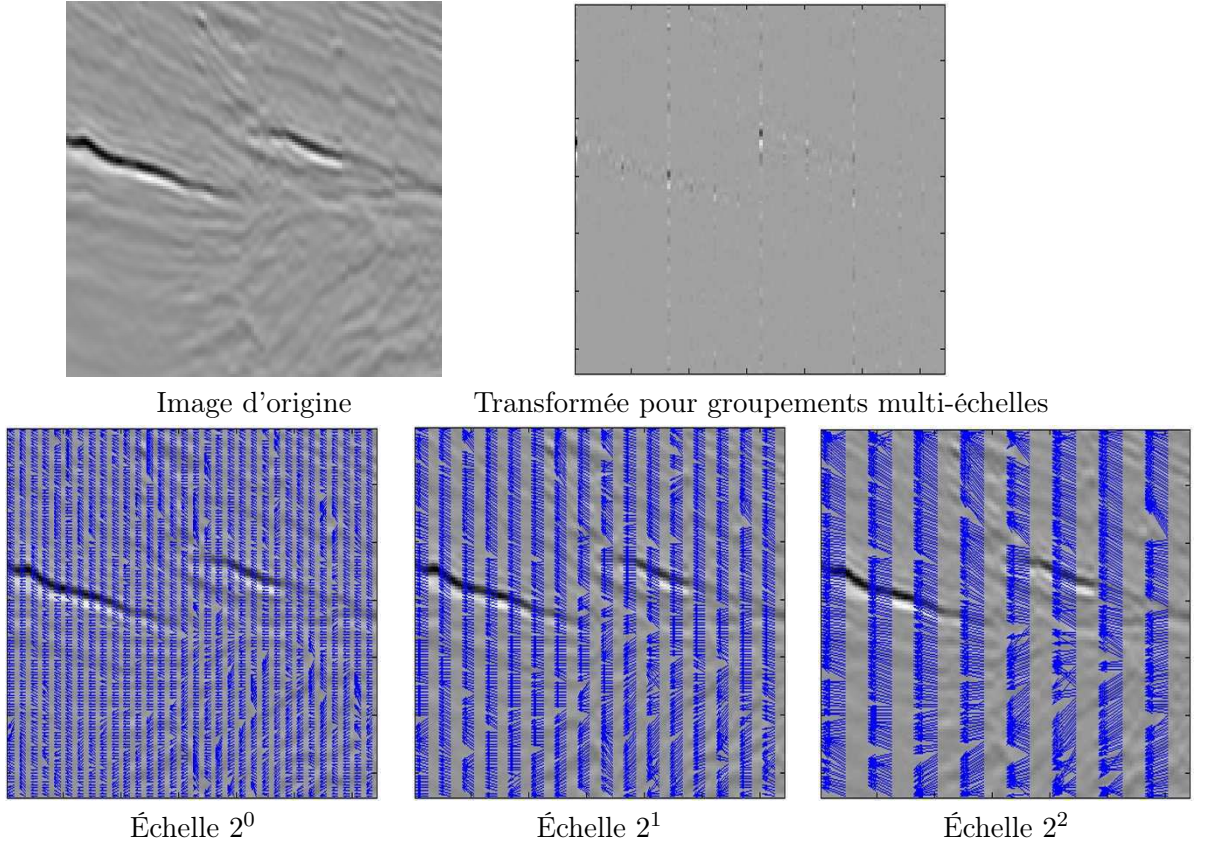
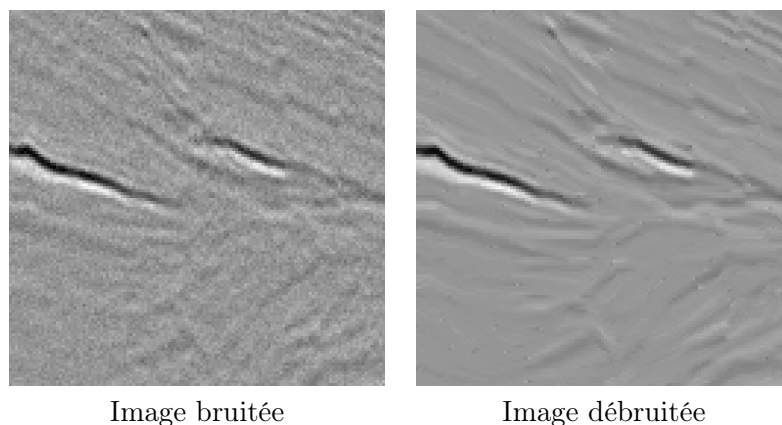


FIG. 23 – *Bandelettisation par groupements multi-échelles d'une image de sismique.*

coefficients d'ondelettes. La topologie des « sous-grilles paires » et « sous-grilles impaires » du champs d'association est adaptée à la direction moyenne des « détails » de l'image extraits par chacune des ondelettes. Pour les « détails horizontaux » les sous-grilles sont obtenues par sous-échantillonnage des colonnes tandis que pour les « détails verticaux » les sous-grilles sont obtenues par sous-échantillonnage des lignes. La cascade de transformées orthogonale (ondelettes suivie de la bandelettisation) définit une nouvelle base orthogonale de bandelettes par groupements.

Les bases de bandelettes par groupements sont plus flexibles que les bases de bandelettes orthogonales présentées dans la section 4.1. En imposant un champs d'association multi-échelles qui suit les lignes intégrales d'un champ de vecteurs parallèles, la bandelettisation par groupements est équivalente à la bandelettisation présentée à la section 4.1 pour une transformée d'Alpert d'ordre 0 (ce qui correspond à la transformée de Haar). Cependant la bandelettisation par groupements offre plus de flexibilité. On peut par exemple définir une géométrie suivant des lignes de flots qui ne sont pas parallèles et qui convergent sur des singularités.

Application au traitement d'images. La plus grande flexibilité géométrique des groupements de cette transformée en bandelettes la rend mieux adaptée au débruitage des textures dont la géométrie est complexe. La figure 26 compare le débruitage obtenu sur le chapeau texturé de l'image de Lena, avec un seuillage dans une base d'ondelettes et un seuillage dans une base de bandelettes par groupements. Comme on peut l'observer, la transformée en bandelettes par groupements restaure la texture fine du chapeau ce que les ondelettes ne peuvent pas faire car elles réalisent une régularisation isotrope qui n'est pas

FIG. 24 – *Débruitage en bandelettes d'une image de sismique.*

adaptée aux oscillations directionnelles de la texture.

À partir d'une texture d'origine et une géométrie spécifiée par un flot géométrique, on peut associer un processus aléatoire dont les réalisations sont des textures qui ressemblent à la texture d'origine mais telles que leur géométrie correspond à un champ de vecteur imposé à l'avance. On obtient ainsi un algorithme de synthèse de textures géométriques. Les images à gauche de la figure 27 montrent les textures d'origine, les images au centre montrent le flot géométrique, qui n'est pas parallèle et inclut des singularités. Les images de droite sont des réalisations du processus synthétisé avec une génération aléatoire des coefficients de bandelettes qui suit des distributions de probabilité ajustée sur les histogrammes des textures d'origine [27].

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le traitement du son est un autre domaine où la géométrie peut jouer un rôle important. La figure 28 montre l'enregistrement d'un chant d'oiseau et son spectrogramme dans le plan temps-fréquence. Les harmoniques de ce chant définissent des structures géométriques qui se répètent dans les directions du temps et de la fréquence, avec des altérations. Représenter et traiter la géométrie de ces structures temps-fréquence est un enjeu important pour le traitement des sons [11].

Neurophysiologie et Physique. Adapter les outils mathématiques pour la modélisation de la géométrie de la perception est important pour la recherche en neurophysiologie de la vision. La neurophysiologie est ici autant une source de créativité que d'application pour de nouvelles mathématiques. La transformée en bandelettes par groupements présente certaines similarités avec l'état des connaissances concernant le comportement de neurones de V1 et V2, mais cette remarque doit être prise avec beaucoup de précaution étant donnée la complexité de ces processus neuronaux. Par exemple, dans notre cadre mathématique l'orthogonalité est un garant de la stabilité de toutes les cascades d'opérateurs utilisées, dont les produits définissent des opérateurs orthogonaux. Cette orthogonalité n'a probablement aucun rôle à jouer dans la modélisation du système visuel.

L'enjeu est d'introduire des outils géométriques suffisamment flexibles pour approcher d'une façon unifiée le traitement de signaux très différents comme des images de contours et de textures, des vidéos en mouvement ou des sons. Tout comme les ondelettes sont devenues un outil important pour l'analyse de structures physiques, il est probable qu'une meilleure compréhension des représentations géométriques de structures complexes aura aussi un rôle à jouer dans l'analyse de nombreux phénomènes physiques tels que la turbulence.

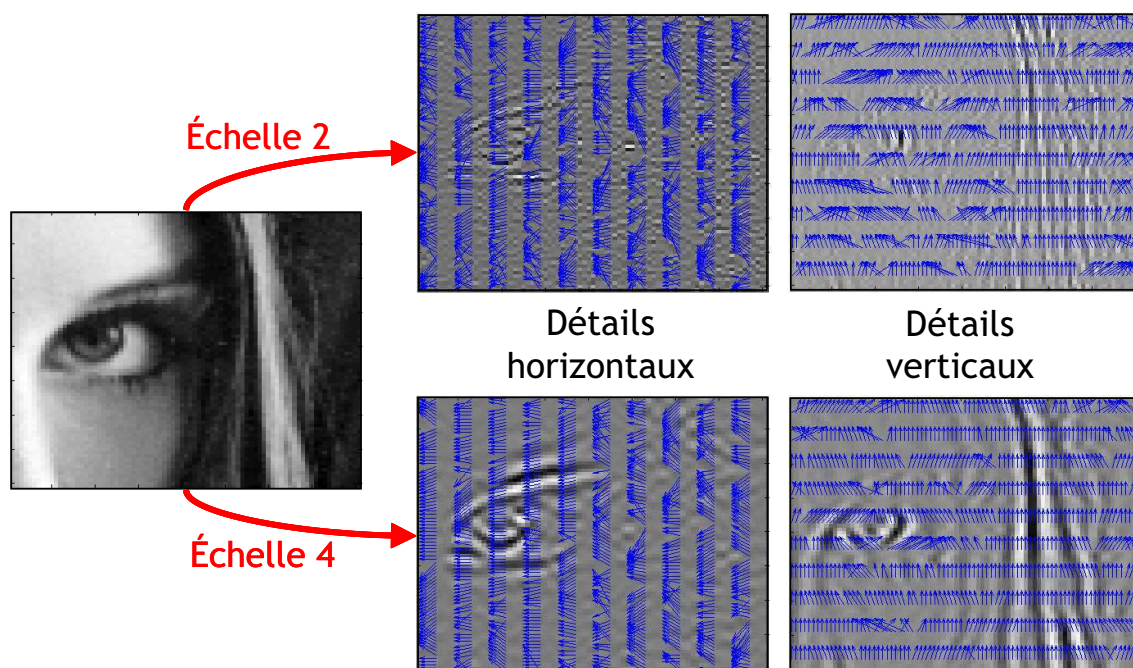


FIG. 25 – *Champ d'association sur plusieurs échelles et orientations d'une transformée en ondelettes.*

Références

- [1] B.K. Alpert. *Wavelets and Other Bases for Fast Numerical Linear Algebra*, pages 181–216. C. K. Chui, editor, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.
- [2] P. C. Bressloff and J. D. Cowan. The functional geometry of local and horizontal connections in a model of v1. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :221–236, Mar-May 2003.
- [3] E. Candès and D. Donoho. *Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges*. Vanderbilt University Press, 1999.
- [4] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev, and H. Xu. Non linear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$. *Amer. J. Math*, 121 :587–628, 1999.
- [5] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 41 :909–996, November 1988.
- [6] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.
- [7] L. Demaret, N. Dyn, and A. Iske. Image compression by linear splines over adaptive triangulations. Preprint, Technische Universität München, 2004.
- [8] D. Donoho. Wedgelets : Nearly-minimax estimation of edges. *Ann. Statist*, 27 :353–382, 1999.
- [9] C. Dossal, E. Le Pennec, and S. Mallat. Denoising with bandelets. *to be submitted*, 2006.
- [10] P.L. Dragotti and M. Vetterli. Wavelet footprints : Theory, algorithms and applications. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(5) :1306–1323, May 2003.
- [11] S. Mallat, E. Bacry and G. Yu. Time-frequency geometry of sounds with grouping bandelets. In *to be submitted*, 2006.

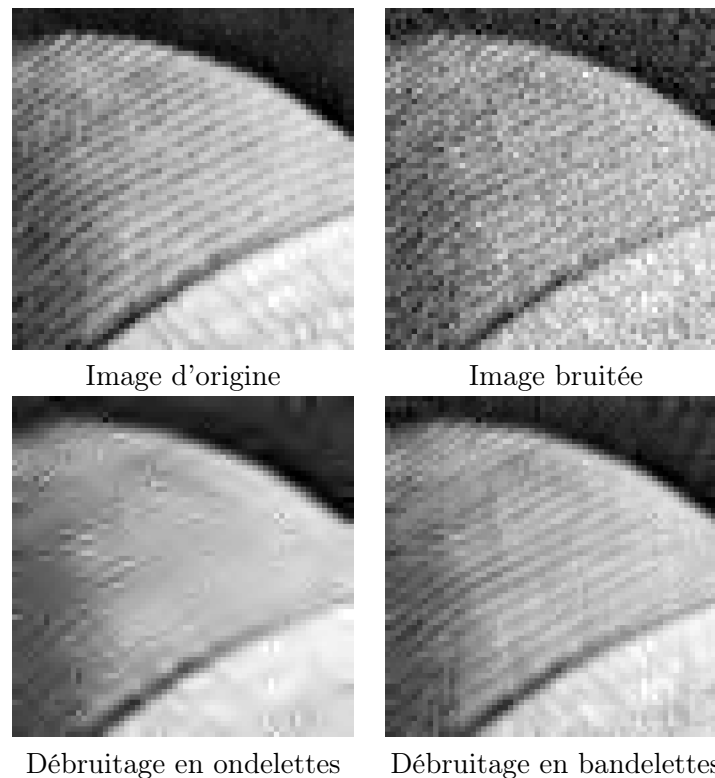


FIG. 26 — Comparaison du débruitage par seuillage en ondelettes et en bandelettes par groupements.

- [12] R. F. Hess, A. Hayes, and D. J. Field. Contour integration and cortical processing. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :105–119, Mar-May 2003.
- [13] D. Hubel and T. Wiesel. Receptive fields and functional architecture of monkey striate cortex. *Journal of Physiology (London)*, 195 :215–243, 1968.
- [14] E. Le Pennec and S. Mallat. Sparse Geometrical Image Approximation with Bandeleets. *IEEE Transaction on Image Processing*, 14(4) :423–438, 2004.
- [15] E. Le Pennec and S. Mallat. Bandelet Image Approximation and Compression. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 4(3) :992–1039, 2005.
- [16] Tai Sing Lee. Computations in the early visual cortex. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :121–139, Mar-May 2003.
- [17] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of \mathbf{L}^2 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315 :69–87, September 1989.
- [18] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, 11(7) :674–693, July 1989.
- [19] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [20] S. Mallat. Method and apparatus for enhancing signals with multiscale grouping bandelets. *International Patent*, submitted by "Let It Wave", 2005.
- [21] S. Mallat. Multiscale grouping for geometry. In *to be submitted*, 2006.
- [22] S. Mallat and F. Falzon. Analysis of low bit rate image tranform coding. *IEEE Trans. Signal Proc.*, January 1998. Special Issue on Wavelets.
- [23] S. Mallat and G. Peyré. Orthogonal bandelet bases for geometric image approximation. In *to be submitted*, 2006.

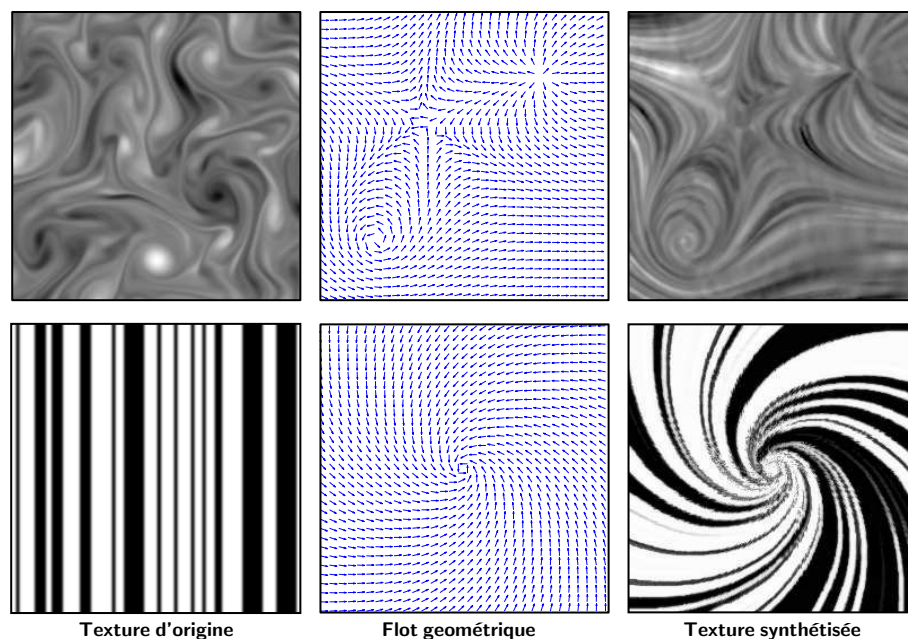


FIG. 27 – Synthèses de textures par bandelettes en utilisant les flots géométriques montrés au centre.

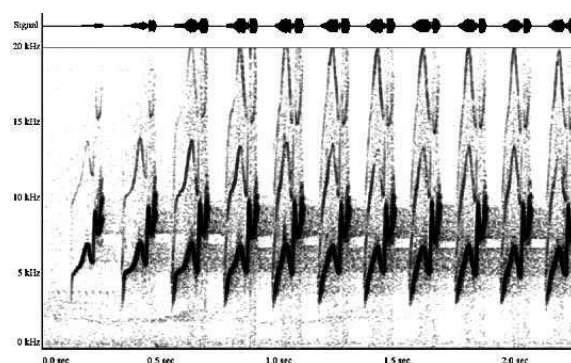


FIG. 28 – Spectrogramme d'un champ d'oiseau.

- [24] B. Matei and A. Cohen. *Nonlinear Subdivision Schemes : Applications to Image processing*, in *Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling*, pages 93–97. Springer Verlag, 2002.
- [25] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. In *Séminaire Bourbaki*, volume 662, Paris, 1986.
- [26] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs*, volume 1. Hermann, Paris, 1990.
- [27] G. Peyré. *Géométrie multi-échelles pour les images et les textures*. PhD thesis, thèse, CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2005.
- [28] G. Peyré and S. Mallat. Discrete bandelets with geometric orthogonal filters. In *ICIP*, Septembre 2005.
- [29] G. Peyré and S. Mallat. Surface compression with geometric bandelets. *ACM Transactions on Graphics, (SIGGRAPH'05)*, 24(3), Aug. 2005.

- [30] R. Shukla, P.L. Dragotti, M. Do, and M. Vetterli. Rate distortion optimized tree structured compression algorithms for piecewise smooth images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(3), 2005.
- [31] M. Wakin, J. Romberg, H. Choi, and R. Baraniuk. Wavelet-domain Approximation and Compression of Piecewise Smooth Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, To appear, 2005.
- [32] M. Wertheimer. Principles of perceptual organisation. In W. H. Ellis, editor, *Source Book of Gestalt Psychology*. London, 1938.
- [33] F. Wolf and T. Geisel. Universality in visual cortical pattern formation. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :253–264, Mar-May 2003.